

版权声明：CC BY-NC：署名-非商业使用许可协议

引用信息：陈关芬，华九如，2026，井中重力探讨，doi:10.12079/blc.gra20250113

井中重力探讨

陈关芬，华九如*

2026 年 1 月 16 日

[注] 这篇文章是在 1978 年由原地质矿产部第二综合物探大队（简称二物）的高级工程师陈关芬撰写的，用于井中重力探测井底和井旁的铬铁矿，以帮助寻找找铬铁矿。此文写完以后，一直未发表。考虑本文对找矿工作有一定参考价值，故此公布在网络上，欢迎朋友们下载自用。感谢黄翠琴、卢荣增将陈的手写稿录入成电子文档，王连功、杨万川对文档进行校对。

华九如：退休，原地质矿产部第二综合物探大队工程师。联系电话：18611608603

在毛主席无产阶级革命路线指引下，我国社会主义革命和社会主义建设事业正出现一个新的高潮。在全国一派大好形势下，地质找矿事业和工农业其它战线一样，也在蓬勃地向前发展。

面临当前的新形势和地质找矿的新要求，地下物探中的“井中重力测量”也引起人们的注意了。遵照毛主席关于“我们必须打破常规，尽量采用先进技术，在一个不太长的历史时期内，把我国建设成为一个社会主义的现代化强国。”的教导，在本年度内，开始对“井中重力测量”工作做了一些探讨。具体就是为了确定仪器精度方面。演算了几种不同储量的球形铬铁矿的理论曲线，以及在正演问题和勘探方法方面，进行了很粗浅的探讨，以供今后开展此项工作参考。

现将工作结果小结于下。

一、关于仪器精度的讨论

若要利用“井中重力测量”寻找铁矿或铬铁矿的盲矿体，首先必须解决井下探矿工具—井中重力仪或井中重力梯度仪。但是，到目前为止，还不了解该仪器需多大的精度才能满足野外勘探的一般要求。为了解决这样的问题，今年以来，我们一方面收集了国内外有关的文献，了解一下现有仪器的精度情况；另一方面，利用电子计算了五种不同储量的球形铬铁矿的理论曲线（共 88 条），以此作为探讨仪器精度的依据。

从现已收集的文献来看，目前国外正在使用的有两种仪器：

(1) ESSO 井中重力仪，加拿大 Scintrex 公司承装，是一种振动弦丝仪器。探头外径 4 吋（cm）。读数一次需时十多分钟。

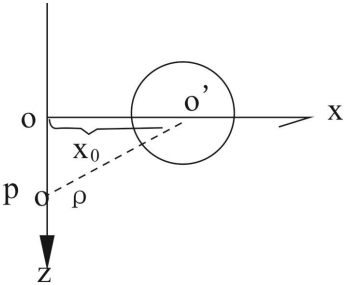
(2) Lacoste—Romberg 井中重力仪是 Lacoste—Romberg 公司与美国地质调查所合搞的，为一无定向弹簧块的重力仪，探头外径 6—7 吋（cm），读数一次需时 5 分钟。

以上两种仪器的读数精度都是 ± 0.01 毫伽（即 ± 10 微伽）。关于理论曲线计算方面，首先求解计算用的正演公式。

设 Z 轴垂直向下，并与井轴重合， X 轴和 Y 轴在水平面上，球心在 X 轴线上，且与井轴相距为 x_0 ，球体的剩余质量为 M ，引力常数 $f=6.67 \times 10^{-8}$ 厘米³/克秒²，则可根据引力公式，分别解出球体在井轴上的重力异常公式和重力位的铅垂二次微商异常公式：

$$\Delta g = \frac{MfZ}{(x_0^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$V_{zz} = \frac{fM(2Z^2 - x_0^2)}{(x_0^2 + Z^2)^{\frac{5}{2}}}$$



（图一）

根据以上公式，假设铬铁矿的比重为 4，剩余密度 $\sigma = 1$ ，测点距离为 5 米， x_0 为一定数值的参变量。即可求出储量为五千吨、一万吨、五万吨、二十万吨和五十万吨的曲线（见附图 I 至附图 V）。

由计算结果而知， Δg 异常于原点为零，整个曲线自上而下由负值转为正值。呈反对称形； V_{zz} 异常也为上下对称曲线，并在 $Z=0$ 处，具明显的负极值。再对比各组曲线，发现矿体储量的改变（即球半径的变化）或球体至钻孔的距离 x_0 值的变化，都会引起异常强度较明显的变化。

基于上述分析，根据“一般大于三倍均方误差的三个相邻测点作为肯定异常的标准”以及“100 米 $\times$ 100 米的勘探网度”的原则，认为各类储量的曲线组中，均应以 $x_0=70.7$ 米（附图中标为 71 米）的异常极值作为衡量仪器精度的标准。

现为说明问题起见，特将铬铁矿不同储量的仪器精度要求列于下表：

储量 (吨)	球半径 R (米)	异常极值		仪器精度要求	
		Δg (微伽)	V_{zz} (厄缶)	Δg (微伽)	V_{zz} (厄缶)
五千	6.68	± 0.64	-0.23	± 0.21	± 0.08

一万	8.42	±1.30	-0.47	±0.43	±0.16
五万	14.4	±6.40	-2.30	±2.13	±0.77
二十万	23.0	±25.60	-9.40	±3.53	±3.13
五十万	31.0	±64.20	-23.60	±21.40	±7.87

按照上表所列，再据现有井中重力仪的精度可达±10 微伽来看，利用 100 米×100 米勘探网度寻找二十万吨以上规模的矿体是可以的，但要勘探小于二十万吨的铬铁矿，就需适当加密勘探网度了。因此，基于目前我国找出铬铁矿的规模不大的特点来考虑为此井中重力仪的精度应不低于±10 微伽为好。

二、井中重力测量正问题的解法

在任一物体的引力场中，该物体外面某一点 P 的引力位 V 如下式所示：

$$V = f \int \frac{d_m}{\rho}$$

式中 f 为引力常数， d_m 是剩余质量单元。假若 P 点的坐标是 (X、Y、Z)，

d_m 的坐标是 (ε、θ、ζ)，则它们之间的距离

$$\rho = [(\varepsilon - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - Z)^2]^{\frac{1}{2}}$$

在笛卡尔直角坐标系中，对上列积分式被积函数沿 Z 轴方向求一次微分，便得到计算 P 点的重力异常 Δg 的公式；沿相应坐标轴的方向求二次微商，便得到计算重力位二次微商异常 V_{xz} 、 V_{yz} 、 V_{xy} 、 V_{Δ} 和 V_{zz} 的公式。

下面将讨论在直孔中测量的几种规则体的正演问题。

(一) 均匀球体正问题的解法

由于球体的引力场和位于球心并与其等质量的质点的引力场完全相同，所以，在直角坐标系中，假设 Z 轴垂直向下与井轴重合，x 轴和 y 轴在水平面上，球心在 x 轴线上，并与井轴相距为 x_0 ，球体的剩余质量为 M（见图一）。在球体井轴上的重力公式和重力位二次微商公式为：

$$\Delta g = f \int \frac{(\zeta - Z) d_m}{\rho^3} = - \frac{MfZ}{\left(x_0^2 + Z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$V_{xz} = 3f \int \frac{(\varepsilon - x)(\zeta - Z) d_m}{\rho^5} = - \frac{MfZ}{\left(x_0^2 + Z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$V_{\Delta} = 3f \int \frac{(\eta - y)^2 - (\varepsilon - x)^2}{\rho^5} d_m = - \frac{3fx_0^2 M}{(x_0^2 + Z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$V_{zz} = f \int \frac{2(\zeta-Z)^2 - (\varepsilon-\chi)^2}{\rho^5} d_m$$

$$= \frac{fM(2Z^2 - \chi_0^2)}{(\chi_0^2 + Z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$V_{yx} = V_{xy} = 0$$

根据上列各式计算的理论曲线如附图 VI。

(二) 均匀水平园柱体正问题的解法

在计算水平园柱体所引起的异常时，把它的质量看成是集中在其轴线上，这对于无限长的园柱体来说，是完全正确的，而对于有限长的园柱体，这样做只能得到一个近似值。

假定 x-z 平面垂直园柱体，并通过园柱体的中心横截面，Z 轴与井轴重合，Y 轴平行于园柱体的轴线，并设园柱体的中点至井轴的距离为 x_0 ，园柱体的长度为 2ℓ ，园柱体在单位长度内的剩余质量为 λ ，

$$\rho = (x_0^2 + \eta^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad d_m = \lambda d\eta$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \Delta g &= f\lambda \int_{-\ell}^{\ell} \frac{-Zd\eta}{(x_0^2 + \eta^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{2f\lambda z\ell}{(x_0^2 + z^2)\sqrt{\ell^2 + x_0^2 + z^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{xz} &= 3f\lambda \int_{-\ell}^{\ell} \frac{-x_0^0 z d\eta}{(x_0^2 + \eta^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= -\frac{2f\lambda x_0 z \ell (3x_0^2 + 3z^2 + 2\ell^2)}{(x_0^2 + z^2)^2 (x_0^2 + z^2 + \ell^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\Delta} &= 3f\lambda \int_{-\ell}^{\ell} \frac{(\eta^2 - x_0^2)d\eta}{(x_0^2 + \eta^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 2f\lambda \ell \left[\frac{z^2 \ell^2 - x_0^2 (3x_0^2 + 3z^2 + \ell^2)}{(x_0^2 + z^2)^2 (x_0^2 + z^2 + \ell^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned}$$

$$V_{zz} = f\lambda \int_{-\ell}^{\ell} \frac{(2z^2 - x_0^2 - \eta^2)d\eta}{(x_0^2 + \eta^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{2f\lambda\ell \left[(z^2 - x_0^2)(-x_0^2 + \ell^2 + z^2) + z^2(x_0^2 + z^2) \right]}{(x_0^2 + z^2)^2 (x_0^2 + z^2 + \ell^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$V_{xy} = V_{yz} = 0$$

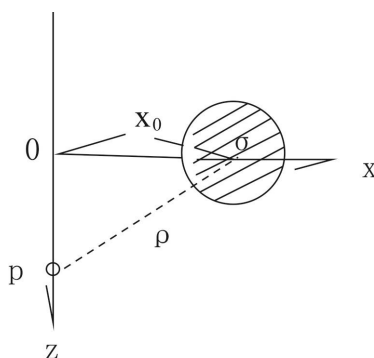
当 $\ell \rightarrow \infty$ 时

$$\Delta g = -\frac{2f\lambda z}{x_0^2 + z^2}$$

$$V_{xz} = \frac{4f\lambda x_0 z}{(x_0^2 + z^2)^2}$$

$$V_{zx} = V_{\Delta} = \frac{2f\lambda(z^2 - x_0^2)}{(x_0^2 + z^2)^2}$$

$$V_{xy} = V_{yz} = 0$$



(图二)

根据以上公式计算的曲线形态如附图 VII_a、VII_b、VII_c 所示。

虽然以上对球体，水平园柱体的重力异常和各二次微商异常都作了推导，实际上，对于直孔来讲，只有 Δg 和 V_{zx} 值有意义，因为限于孔径大小，其它各重力位二次微商在直孔中是无法测定的。

(三) 任意倾角板状体正问题的解法

在 Z 轴垂直向下并与井轴重合的直角坐标系上，有一个在 Y 方向无限延伸，长度为 2ℓ ，厚度为 $2a$ ，剩余密度为 σ 的板状体。设板状体的中心点与坐标原点重合，并且，以 Y 轴为中心转动 α 角（顺时针方向）。

现为了求得任意倾角板状体（截面为矩形 ABCD）在井轴上引起的重力异常（忽略钻孔的影响），首先需分别求出截面为平行四边形 $\square AECF$ 的板状体（AE 和 CF 都平行 Z 轴）和四个三棱柱（截面分别为 $\triangle AMB$ 、 $\triangle CND$ 、 $\triangle BME$ 、 $\triangle DNF$ ）在 Z 轴上引起的异常，然后再以该板状体的异常值减去各三棱柱的即为欲求板状

体的异常值。

由图三可知，A、B、C、D、E、F、M、N 各点的座标分别为：

$$\varepsilon_A = -\varepsilon_C = \ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha$$

$$\zeta_A = -\zeta_C = \ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha$$

$$\varepsilon_B = -\varepsilon_D = \ell \cos \alpha - \alpha \sin \alpha$$

$$\zeta_B = -\zeta_D = \ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha$$

$$\varepsilon_E = -\varepsilon_F = \varepsilon_A$$

$$\zeta_E = -\zeta_F = \ell \sin \alpha + \frac{(\sin^2 \alpha + 1)^\alpha}{\cos \alpha}$$

$$\varepsilon_M = -\varepsilon_N = \varepsilon_A$$

$$\zeta_M = -\zeta_N = \zeta_B$$

根据引力公式，先解截面为□AECF 的板状体在井轴上的重力异常。

$$\begin{aligned} \Delta g_{\square AECF} &= 2f\sigma \int_{\varepsilon_C}^{\varepsilon_A} d\varepsilon \int_{\frac{\varepsilon \tan \alpha - \frac{\alpha}{\cos \alpha}}{\varepsilon^2 + (\zeta - z)^2}}^{\frac{\varepsilon \tan \alpha + \frac{\alpha}{\cos \alpha}}{\varepsilon^2 + (\zeta - z)^2}} \frac{(\zeta - z) d\zeta}{\varepsilon^2 + (\zeta - z)^2} \\ &= 2f\sigma \int_{-\varepsilon_A}^{\varepsilon_A} d\varepsilon \int_{\frac{\varepsilon \sin \alpha - \alpha}{\cos \alpha}}^{\frac{\varepsilon \sin \alpha + \alpha}{\cos \alpha}} \frac{(\zeta - z) d\zeta}{\varepsilon^2 + (\zeta - z)^2} \\ &= f\sigma \{ [\ell \cos \alpha + (2\alpha - z \cos \alpha) \sin \alpha] \ell_n [(\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha)^2 \\ &\quad + 2 \sin \alpha (\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha)(\alpha - z \cos \alpha) + (\alpha - z \cos \alpha)^2] \\ &\quad - [\ell \cos \alpha + (2\alpha + z \cos \alpha) \sin \alpha] \ell_n [(\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha)^2 \\ &\quad + 2 \sin \alpha (\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha)(\alpha + z \cos \alpha) + (\alpha + z \cos \alpha)^2] \\ &\quad + (\ell + z \sin \alpha) \cos \alpha \ell_n [\ell^2 + \alpha^2 + z^2 + 2z(\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha)] \\ &\quad - \cos^2 \alpha - (\ell - z \sin \alpha) \cos \alpha \ell_n [\ell^2 + \alpha^2 + z^2 - 2z(\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha)] \\ &\quad - \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha (c - z \cos \alpha) \\ &\quad \left[\tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha + (2\alpha - z \cos \alpha) \sin \alpha}{(\alpha - z \cos \alpha) \cos \alpha} + \tan^{-2} \frac{\ell + z \sin \alpha}{\alpha - z \cos \alpha} \right] \end{aligned}$$

然后。分别求解四个三棱柱在井轴上的重力异常。

7

$$\alpha^2 + z^2 + 2z(\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha)] - (\ell \cos \alpha - \alpha \sin \alpha)$$

$$\ell_n[\ell^2 + \alpha^2 + z^2 - 4\alpha \sin \alpha \cos \alpha + 2z(\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha)]$$

$$-2(\ell + z \sin \alpha) \sin \alpha (\tan^{-1} \frac{\alpha - z \cos \alpha}{\ell + z \sin \alpha} + \tan^{-1} \frac{\alpha + z \cos \alpha}{\ell + z \sin \alpha})$$

$$+2(\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha + z) [\tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha + \alpha \cos \alpha}{\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha + z}$$

$$- \tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha - \alpha \sin \alpha}{\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha + z}] + 2\alpha \sin \alpha (\ell_n \cos^2 \alpha + \ell_n \tan^2 \alpha) \}$$

$$\Delta g \Delta BMF = 2f\sigma \int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} d\varepsilon \int_{\zeta_B}^{\zeta_B + (\varepsilon - \varepsilon_B) \tan \alpha} \frac{(\zeta - z) d\zeta}{\varepsilon^2 + (\zeta - z)^2}$$

$$= f\sigma \{ [\ell \cos \alpha + (2\alpha - z \cos \alpha) \sin \alpha] \ell_n [(\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha)^2$$

$$+ 2 \sin \alpha (\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha) (\alpha - z \cos \alpha) + (\alpha - z \cos \alpha)^2]$$

$$- (\ell - z \sin \alpha) \cos \alpha \ell_n [\ell^2 + \alpha^2 + z^2 - 2z(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)]$$

$$\cos^2 \alpha - (\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha) \ell_n [\ell^2 + \alpha^2 + z^2 + 4\alpha \ell \sin \alpha \cos \alpha - 2z$$

$$(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)] + (\ell \cos \alpha - \alpha \sin \alpha) \ell_n [\ell^2 + \alpha^2 + z^2 - 2z$$

$$(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)] + 2(\alpha - z \cos \alpha) \cos \alpha$$

$$[\tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha + (2\alpha - z \cos \alpha) \sin \alpha}{(\alpha - z \cos \alpha) \cos \alpha} - \tan^{-1} \frac{\ell - z \sin \alpha}{\alpha - z \cos \alpha}]$$

$$- 2(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha - z) [\tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha}{\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha - z}$$

$$- \tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha - \alpha \sin \alpha}{\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha - z}] - 2\alpha \sin \alpha \ell_n \cos^2 \alpha \}$$

$$\Delta g \Delta DNF = 2f\sigma \int_{\varepsilon_c}^{\varepsilon_D} d\varepsilon \int_{\zeta_D + \tan \alpha (\varepsilon - \varepsilon_D)}^{\zeta_D} \frac{(\zeta - z) d\zeta}{\varepsilon^2 + (\zeta + z)^2}$$

$$= f\sigma \{ -[\ell \cos \alpha + (2\alpha + z \cos \alpha) \sin \alpha] \ell_n [(\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha)^2$$

$$+ 2(\alpha + z \cos \alpha) (\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha) \sin \alpha + (\alpha + z \cos \alpha)^2]$$

$$+ (\ell + z \sin \alpha) \cos \alpha \ell_n [\ell^2 + \alpha^2 + z^2 + 2z(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)]$$

$$\cos^2 \alpha + (\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha) \ell_n [\ell^2 + \alpha^2 + z^2 + 4\alpha \ell \sin \alpha \cos \alpha$$

$$+ 2z(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)] - (\ell \cos \alpha - \alpha \sin \alpha) \ell_n [\ell^2 + \alpha^2$$

$$\begin{aligned}
& +z^2 + 2z(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)] - 2(\alpha + \alpha \sin \alpha) \cos \alpha \\
& [\tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha + (2\alpha + z \cos \alpha) \sin \alpha}{(\alpha + z \cos \alpha) \cos \alpha} - \tan^{-1} \frac{\ell + z \sin \alpha}{\alpha + z \cos \alpha}] \\
& + 2(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha + z) [\tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha}{\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha + z} \\
& - \tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha - \alpha \sin \alpha}{\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha + z}] + 2\alpha \sin \alpha \ell_n \cos^2 \alpha \}
\end{aligned}$$

求出上列板状体与三稜柱的异常之差。即为截面呈矩形（□ABCD）的板状体在井轴上的重力异常。

$$\begin{aligned}
\Delta g = f \sigma \{ & (\ell + z \sin \alpha) \cos \alpha \ell_n \frac{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 + 2z(\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 + 2z(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)} \\
& + (\ell - z \sin \alpha) \cos \alpha \ell_n \frac{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 - 2z(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)}{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 - 2z(\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha)} \\
& - (\alpha + z \cos \alpha) \sin \alpha \ell_n \frac{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 - 2z(\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 + 2z(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)} \\
& - (\alpha - z \cos \alpha) \sin \alpha \ell_n \frac{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 - 2z(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)}{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 + 2z(\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha)} \\
& + (\ell \cos \alpha + \alpha \cos \alpha) \ell_n \frac{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 - 2z(\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 + 2z(\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha)} \\
& \frac{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 + 4\alpha \ell \sin \alpha \cos \alpha - 2z(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)}{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 + 4\alpha \ell \sin \alpha \cos \alpha + 2z(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)} \} \\
& - (\ell \cos \alpha - \alpha \sin \alpha) \ell_n \left[\frac{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 - 4\alpha \ell \sin \alpha \cos \alpha - 2z(\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 - 4\alpha \ell \sin \alpha \cos \alpha + 2z(\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha)} \right. \\
& \left. \frac{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 - 2z(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)}{\ell^2 + \alpha^2 + z^2 + 2z(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)} \right] \\
& + 2 \cos(\alpha - z \cos \alpha) \left[\tan^{-1} \frac{\ell + z \sin \alpha}{\alpha - z \cos \alpha} + \tan^{-1} \frac{\ell - z \sin \alpha}{\alpha - z \cos \alpha} \right. \\
& - 2 \cos(\alpha + z \cos \alpha) \left[\tan^{-1} \frac{\ell - z \sin \alpha}{\alpha + z \cos \alpha} + \tan^{-1} \frac{\ell + z \sin \alpha}{\alpha + z \cos \alpha} \right. \\
& - 2(\ell - z \sin \alpha) \sin \alpha \left[\tan^{-1} \frac{\alpha + z \cos \alpha}{\ell - z \sin \alpha} + \tan^{-1} \frac{\alpha - z \cos \alpha}{\ell - z \sin \alpha} \right] \\
& \left. + 2(\ell + z \sin \alpha) \sin \alpha \left[\tan^{-1} \frac{\alpha + z \cos \alpha}{\ell + z \sin \alpha} + \tan^{-1} \frac{\alpha - z \cos \alpha}{\ell + z \sin \alpha} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2(\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha - z) \left[\tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha}{\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha - z} - \tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha - \alpha \sin \alpha}{\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha - z} \right] \\
& -2(\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha + z) \left[\tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha}{\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha + z} - \tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha - \alpha \sin \alpha}{\ell \sin \alpha - \alpha \cos \alpha + z} \right] \\
& +2(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha - z) \left[\tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha}{\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha - z} - \tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha - \alpha \sin \alpha}{\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha - z} \right] \\
& -2(\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha + z) \left[\tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha + \alpha \sin \alpha}{\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha + z} - \tan^{-1} \frac{\ell \cos \alpha - \alpha \sin \alpha}{\ell \sin \alpha + \alpha \cos \alpha + z} \right]
\end{aligned}$$

当 $\alpha = 0^\circ$ 时（如水平层）：

$$\begin{aligned}
\Delta g = f\sigma & \left[2\ell \ell_n \frac{\ell^2 + (\alpha - z)^2}{\ell^2 + (\alpha + z)^3} + 4(\alpha - z) \tan^{-1} \frac{\ell}{\alpha - z} \right. \\
& \left. - 4(\alpha + z) \tan^{-1} \frac{\ell}{\alpha + z} \right]
\end{aligned}$$

当 $\alpha = 90^\circ$ 时（如直立岩墙）：

$$\begin{aligned}
\Delta g = f\sigma & \left[2\ell \ell_n \frac{\ell^2 + (\alpha - z)^3}{\ell^2 + (\alpha + z)^2} + 4(\alpha - z) \tan^{-1} \frac{\ell}{\alpha - z} \right. \\
& \left. - 4(\alpha + z) \tan^{-1} \frac{\ell}{\alpha + z} \right]
\end{aligned}$$

根据以上求解结果，可计算出一系列不同倾角的理论曲线，现假设 $\alpha = 0^\circ$ ， 30° ， 60° ， 90° ，演算了四条理论曲线列于附图 VII_a—VII_d。总的来看，重力异常自上而下由正转负，呈反对称曲线，但从具体形态和极值位置来看，则随 α 角度的变化而异。当 α 为 0° 和 90° 时，板状体界面与井轴的正交处，异常具明显的突变现象，但曲线的梯度变化和极值位置却各有独特之处。

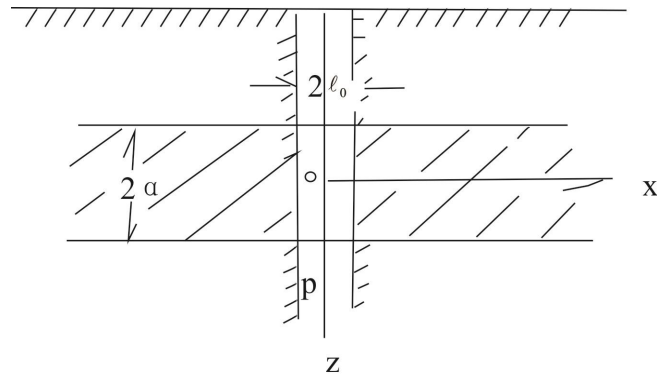
（四）包含钻孔影响时，水平层正问题的解法。

以上讨论的问题均已忽略了钻孔的影响，假如考虑钻孔的影响，将会得到什么样的结果呢？

假设有一个剩余密度为 σ ，厚度为 2α ，以 ℓ 为半径的水平层被半径为 ℓ_0 的钻孔穿透。Xoy 面平行于水平层，并位于水平层中间，Z 轴垂直向下与井轴重合，测点 P 在 Z 轴上。现为计算方便起见，将直角坐标 $(\varepsilon, \eta, \zeta)$ 换为园柱座标 (γ, α, ζ) 则重力异常公式为：

$$\begin{aligned}
\Delta g &= f\sigma \int_{\ell_0}^{\ell} r dr \int_{-\alpha}^{\alpha} d\zeta \int_0^{2\pi} \frac{(\zeta - z) d\alpha}{[r^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= -2\pi\sigma f [(\sqrt{\ell^2 + (\alpha - z)^2} - \sqrt{\ell^2 + (\alpha + z)^2} \\
&\quad - [\sqrt{\ell_0^2 + (\alpha - z)^2} - \sqrt{\ell_0^2 + (\alpha + z)^2}])
\end{aligned}$$

若令 $\ell \rightarrow \infty$ 则 $\Delta g = 2\pi\sigma f[\sqrt{\ell_0^2 + (\alpha - z)^2} - \sqrt{\ell_0^2 + (\alpha + z)^2}]$



(图四)

假如将 XOY 座标面重合于水平层的上界面，可同样求解，只不过这里的厚度相当前面的 2α 。

$$\Delta g = -2\pi\sigma f[(\sqrt{\ell^2 + (h-z)^2} - \sqrt{\ell^2 + z^2}) - (\sqrt{\ell_0^2 + (h-z)^2} - \sqrt{\ell_0^2 + z^2})]$$

$$\text{当 } \ell \rightarrow \infty \text{ 时 } \Delta g = 2\pi\sigma f[\sqrt{\ell_0^2 + (h-z)^2} - \sqrt{\ell_0^2 + z^2}]$$

根据上列两式计算的曲线如附图 IX_b。

对比附图 IX 和附图 VIII_d，表征在长度和厚度相同的情况下（这里指在 XOZ 面上的长度和厚度）， $\alpha = 0^\circ$ 的板状体与有钻孔存在的水平层，其曲线形态完全一致，所不同的是在强度上有差异。

以上球体和水平园柱体的解表明，无论是井中重力异常 Δg 或井中重力位二次微商异常 V_{zz} ，均不能反映出矿体相对钻孔的方位。因此，仅在单孔中勘探旁侧矿体是无法判断矿体相对钻孔的方位，必须具备一对孔或一组钻孔进行勘测，才能确定矿体的位置。

上述正演问题的讨论，只是轮廓性的，致于某些具体问题，如矿体内部的重力异常应该如何看待等，尚待今后进一步研究分析。

由于水平低，人力少。工作中可能有不少缺点和错误。望多多批评指正。

附表：1、球形铬铁矿各储量井中重力测量理论曲线计算数据一卷（电子计算机打印材料）

2、各规则体井中重力测量理论曲线计算结果表 1 份

计 算 结 果 表

附表二

球体: $R=25M$, $\sigma=1$, $f=6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{C} \cdot \text{S}_{ec}^2$

Z (M)	$x_0 = 50M$				$x_0 = 50M$	
	$\Delta g (\mu g)$	$V_{xz} (E)$	$V_{\Delta} (E)$	$V_{zz} (E)$	$\Delta g (\mu g)$	$V_{zz} (E)$
-200	9	0.35	-0.088	0.91	-10.91	-1.09
-180	12	0.52	0.14	1.20	-13.47	-1.50
-160	15	0.79	-0.25	1.60	-17.05	-2.13
-140	19	1.26	-0.45	2.21	-22.27	-3.18
-120	24	2.12	-0.88	3.09	-30.32	-5.05
-100	31	3.75	-1.87	4.37	-43.66	-8.73
-80	42	7.01	-4.38	6.02	-68.21	-17.05
-60	55	13.52	-11.27	7.06	-121.26	-40.42
-50	62	18.52	-18.52	6.17	-174.62	-69.85
-40	67	24.34	-30.43	2.84	-272.84	-136.42
-30	66	29.15	-48.58	-4.53	-485.06	-323.37
-20	56	28.91	-72.28	-16.38	-1091.38	-1091.38
-10	33	18.98	-94.90	-29.10	-4365.50	-8731.00
0	0	0	-104.61	-34.87	∞	∞

水平圆柱体: $R=25M$ $x_0=50M$ $\sigma=1$ $f=6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{G} \cdot \text{sec}^2$

Z (M)	$\ell=100M$				$\ell \rightarrow \infty$		
	Δg (μg)	V_{xz} (E)	V_{Δ} (E)	V_{zz} (E)	Δg (μg)	V_{xz} (E)	$V_{zz} = V_{\Delta}$ (E)
0	0	0	-131.2	-93.11	0	0	-104.8
-10	89.74	38.08	-119.16	-82.13	99.26	38.74	-93
-20	160.00	61.00	-90.87	-62.94	180.66	62.30	-65.4
-30	199.64	66.17	-73.77	-26.85	231.12	68.00	-36.3
-40	215.21	60.12	-36.99	-5.71	255.54	62.32	-14
-60	203.03	39.59	-11.97	13.68	257.64	42.24	7.7
-80	171.25	23.77	-3.53	16.63	235.44	26.46	12.9
-100	139.69	14.28	-0.93	14.60	209.54	16.76	12.6
-120	113.40	8.82	-0.16	11.71	185.99	11.00	10.9
-140	92.61	5.63	0.048	9.16	165.93	7.50	9.2
-160	76.41	3.72	0.09	7.13	149.14	5.30	7.7
-180	63.75	2.54	0.084	5.59	135.09	3.88	6.4

-200	53.80	1.78	0.067	4.42	123.26	2.90	5.4
------	-------	------	-------	------	--------	------	-----

板状体: $\ell=100\text{M}$; $\alpha=10\text{M}$ $\sigma=1$

水平层: $\ell=100\text{M}$ ∞ ; $h=20\text{M}$ $\sigma=1$

$\ell_0=11\text{cm}$, $f=6.67 \times 10^{-8} \text{cm}^3/\text{G} \cdot \text{sec}^2$

Δg 值计算表

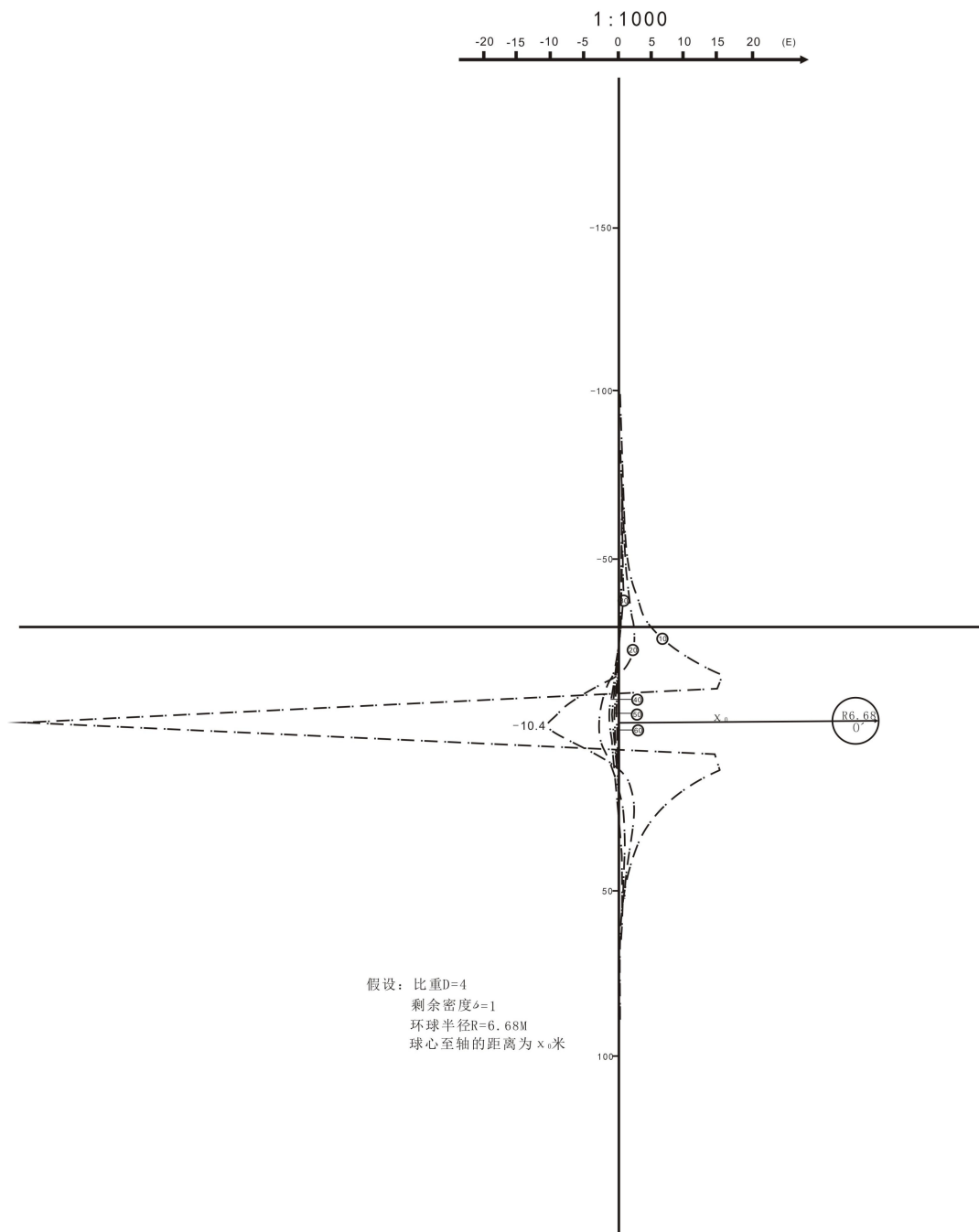
Z (M)	板状体 $\Delta g (\mu g)$				水平层 $\Delta g (\mu g)$	
	$\alpha=0^\circ$	$\alpha=30^\circ$	$\alpha=60^\circ$	$\alpha=90^\circ$	$\ell=100\text{m}$	$\ell \rightarrow \infty$
200		-253.19	-274.80	-291.07	-81.29	-838.00
180	-271.07	-280.07	-300.28	-334.33	-97.77	-838.00
160	-296.92	-311.76	-345.51	-389.25	-116.06	-838.00
140	-331.95	-339.50	-393.60	-474.69	-141.20	-838.00
120	-369.99	-386.86	-454.63	-628.77	-173.88	-838.00
100	-419.44	-441.29	-512.19	-1065.48	-218.72	-838.00
90	-446.99	-463.30	-530.47	-749.80		
80	-479.20	-493.45	-551.81	-575.37	-278.22	-838.00
70	-512.74	-526.13	-557.68	-457.90		
60	-549.95	-552.31	-552.34	-367.34	-358.66	-838.00
50	-590.98	-583.63	-545.61	-288.20		
45	-613.35	-598.90	-529.20	-257.76		
40	-635.54	-613.41	-518.92	-225.09	-464.40	-838.00
35	-658.36	-618.58	-508.59	-194.48		
30	-682.90	-643.45	-498.38	-164.63	-527.94	-838.00
25	-707.81	-661.86	-485.18	-135.09		
20	-732.93	-671.74	-471.90	-108.21	-598.33	-837.99
15	-759.21	-684.81	-356.44	-80.00		
10	-785.22	-602.37	-236.12	-53.84	-674.57	-837.98
5	-392.54	-310.56	-118.19	-24.17		
0	0	0	0	0	-750.44	-833.40
-5					-337.48	-418.97
-10					0	0

附 图 目 录

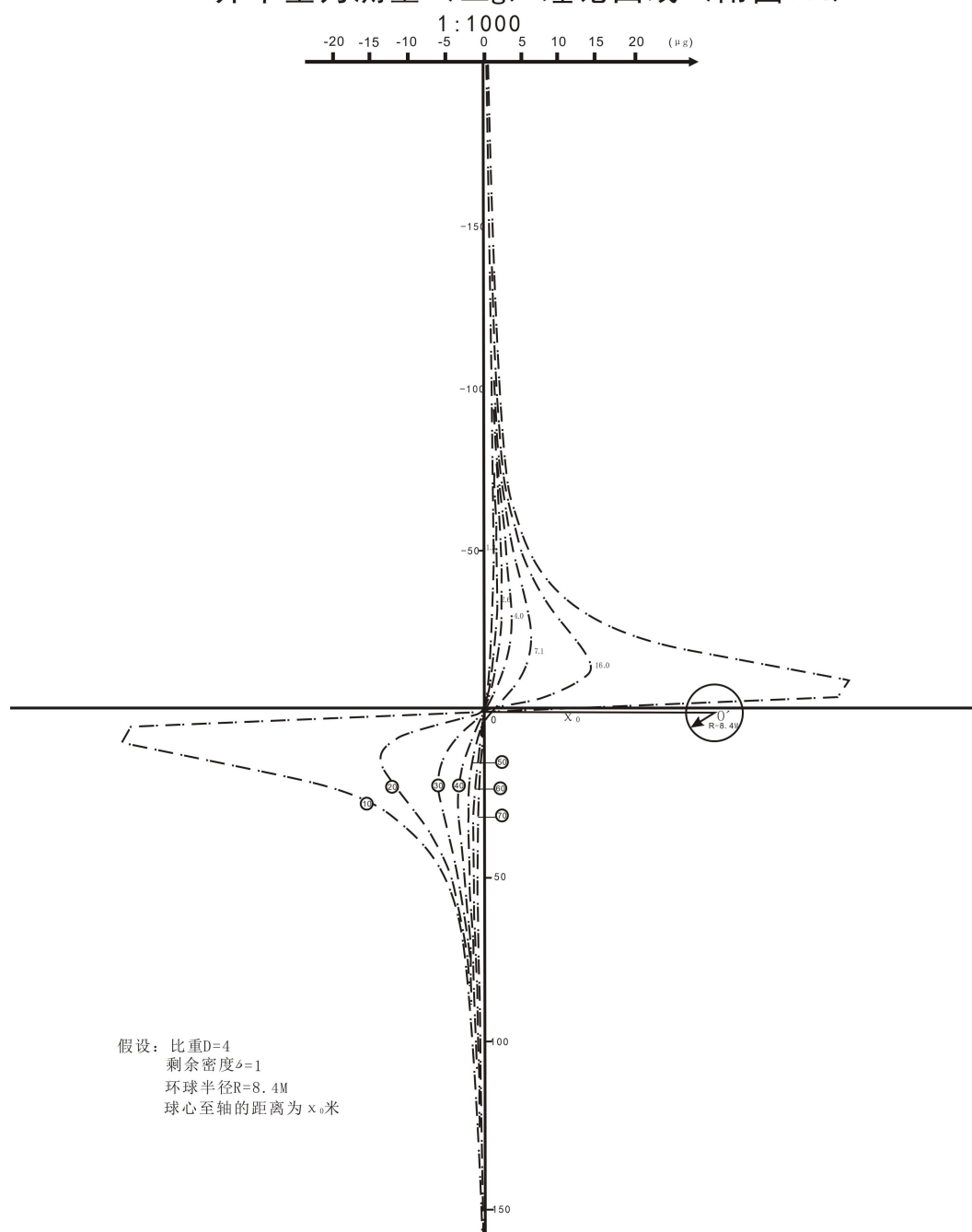
顺序号	图号	图名	比例尺
1	I _a	球形铬铁矿五千吨井中重力测量 (Δg) 理论曲线	1: 1000
	I _b	球形铬铁矿五千吨井中重力测量 (V_{zz}) 理论曲线	1: 1000
2	II _a	球形铬铁矿一万吨井中重力测量 (Δg) 理论曲线	1: 1000

	II _b	球形铬铁矿一万吨井中重力测量 (V_{zz}) 理论曲线	1: 1000
3	III _a	球形铬铁矿五万吨井中重力测量 (Δg) 理论曲线	1: 1000
	III _b	球形铬铁矿五万吨井中重力测量 (V_{zz}) 理论曲线	1: 1000
4	IV _a	球形铬铁矿二十万吨井中重力测量 (Δg) 理论曲线	1: 1000
	IV _b	球形铬铁矿二十万吨井中重力测量 (V_{zz}) 理论曲线	1: 1000
5	V _a	球形铬铁矿五十万吨井中重力测量 (Δg) 理论曲线	1: 1000
	V _b	球形铬铁矿五十万吨井中重力测量 (V_{zz}) 理论曲线	1: 1000
6	VI	球体井中重力测量理论曲线	1: 1000
7	VII _a	水平园柱体井中重力测量 (Δg) 理论曲线	1: 1000
	VII _b	均匀有限长水平园柱体井中重力测量 (Δg) 理论曲线	1: 1000
	VII _c	均匀有限长水平园柱体井中重力测量 (Δg) 理论曲线	1: 1000
8	VIII _a	板状体井中重力测量 (Δg) 理论曲线 $\alpha = 30^\circ$	1: 1000
	VIII _b	板状体井中重力测量 (Δg) 理论曲线 $\alpha = 60^\circ$	1: 1000
	VIII _c	板状体井中重力测量 (Δg) 理论曲线 $\alpha = 90^\circ$	1: 1000
9	VIII _d	板状体井中重力测量 (Δg) 理论曲线 $\alpha = 0^\circ$	1: 1000
	IX	水平层井中重力测量 (Δg) 理论曲线	1: 1000

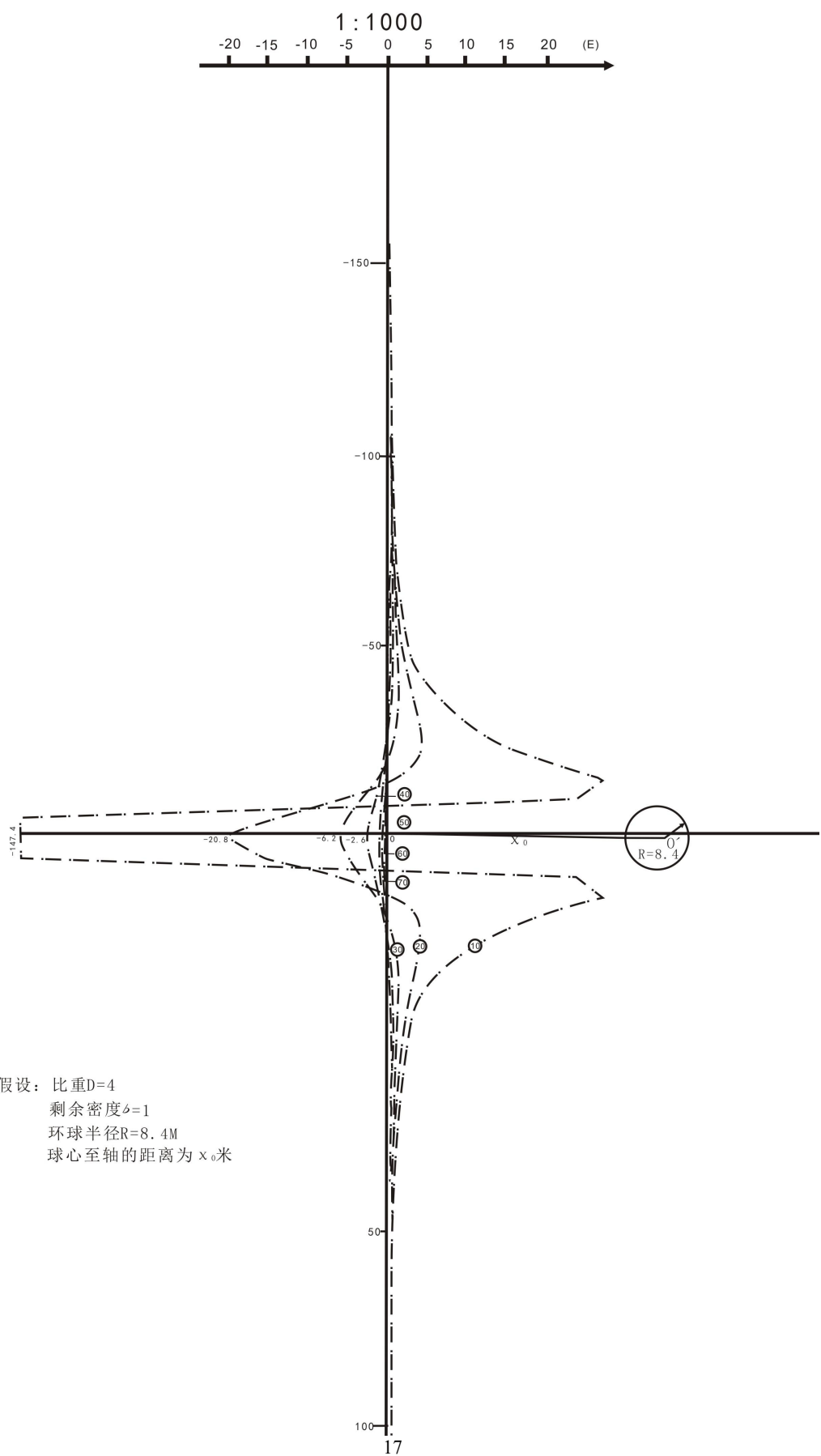
球形铬铁矿五千吨
井中重为测量 (V_{zz}) 理论曲线 (附图I_b)



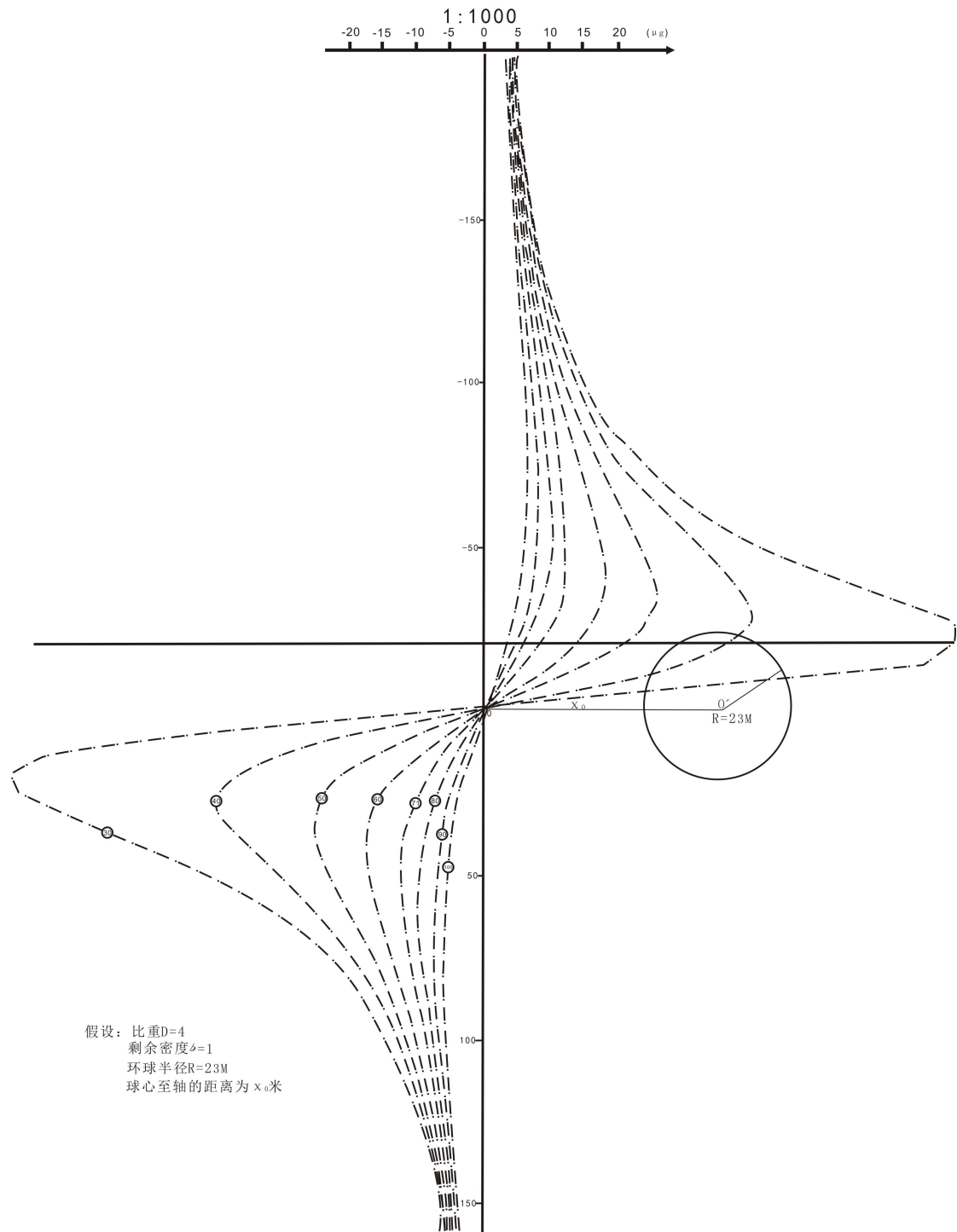
球形铬铁矿一万吨 井中重为测量 (Δg) 理论曲线 (附图IIa)



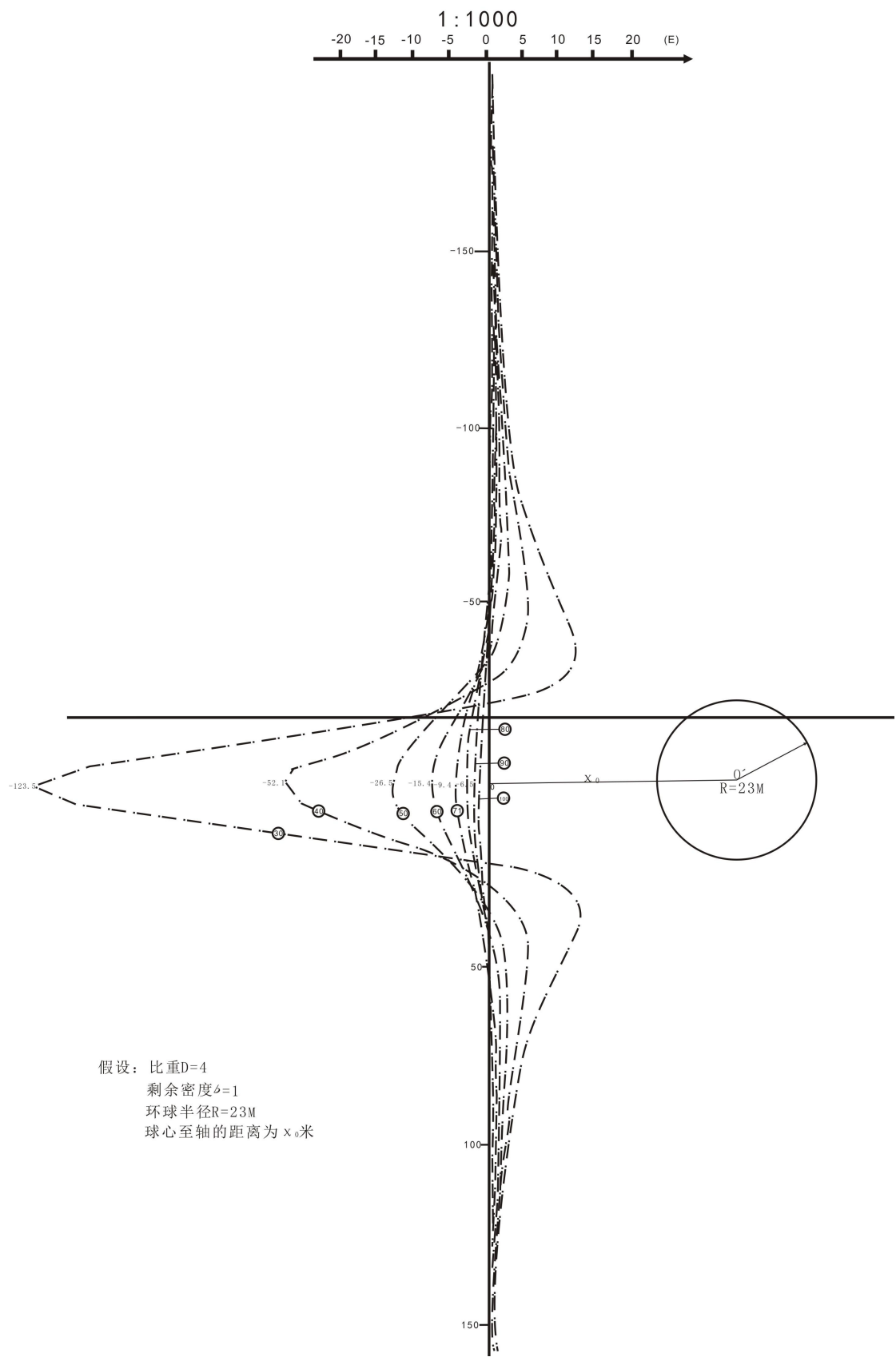
球形铬铁矿一万吨
井中重为测量 (V_{zz}) 理论曲线 (附图11_b)



球形铬铁矿二十万吨 井中重为测量 (Δg) 理论曲线 (附图11a)

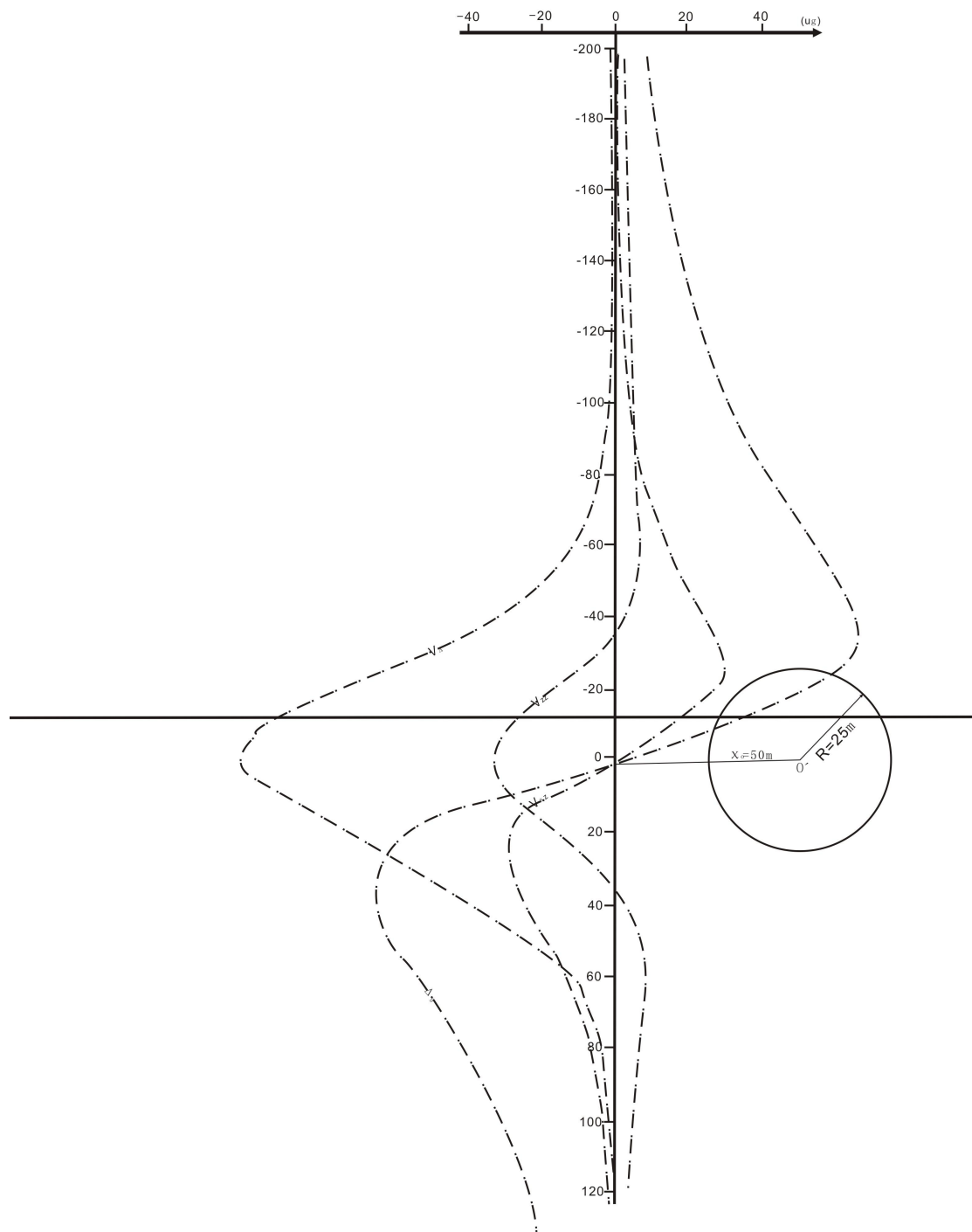


球形铬铁矿一万吨 井中重力测量 (V_{zz}) 理论曲线 (附图IV_b)



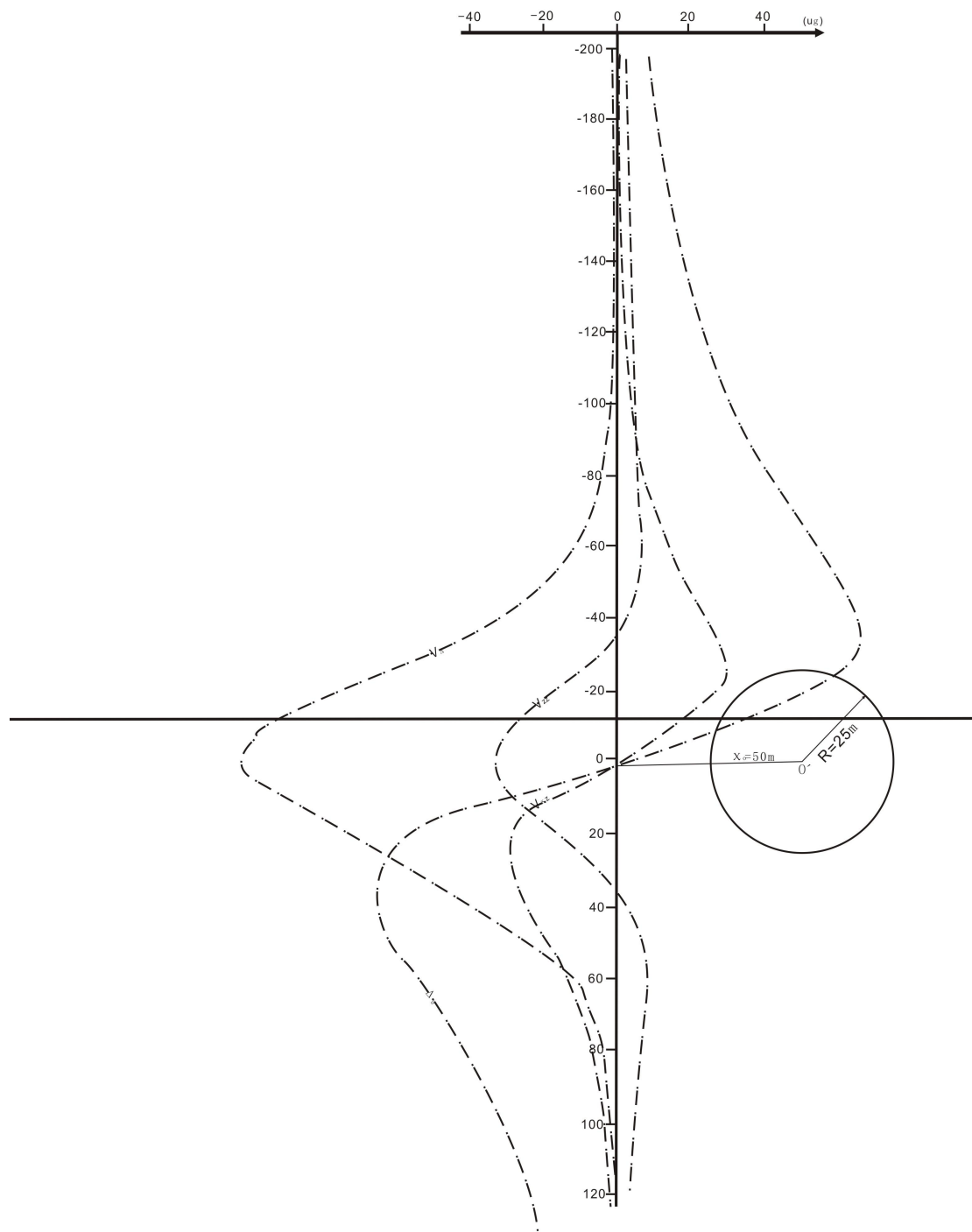
球体井中重力测量理论曲线（附图VI）

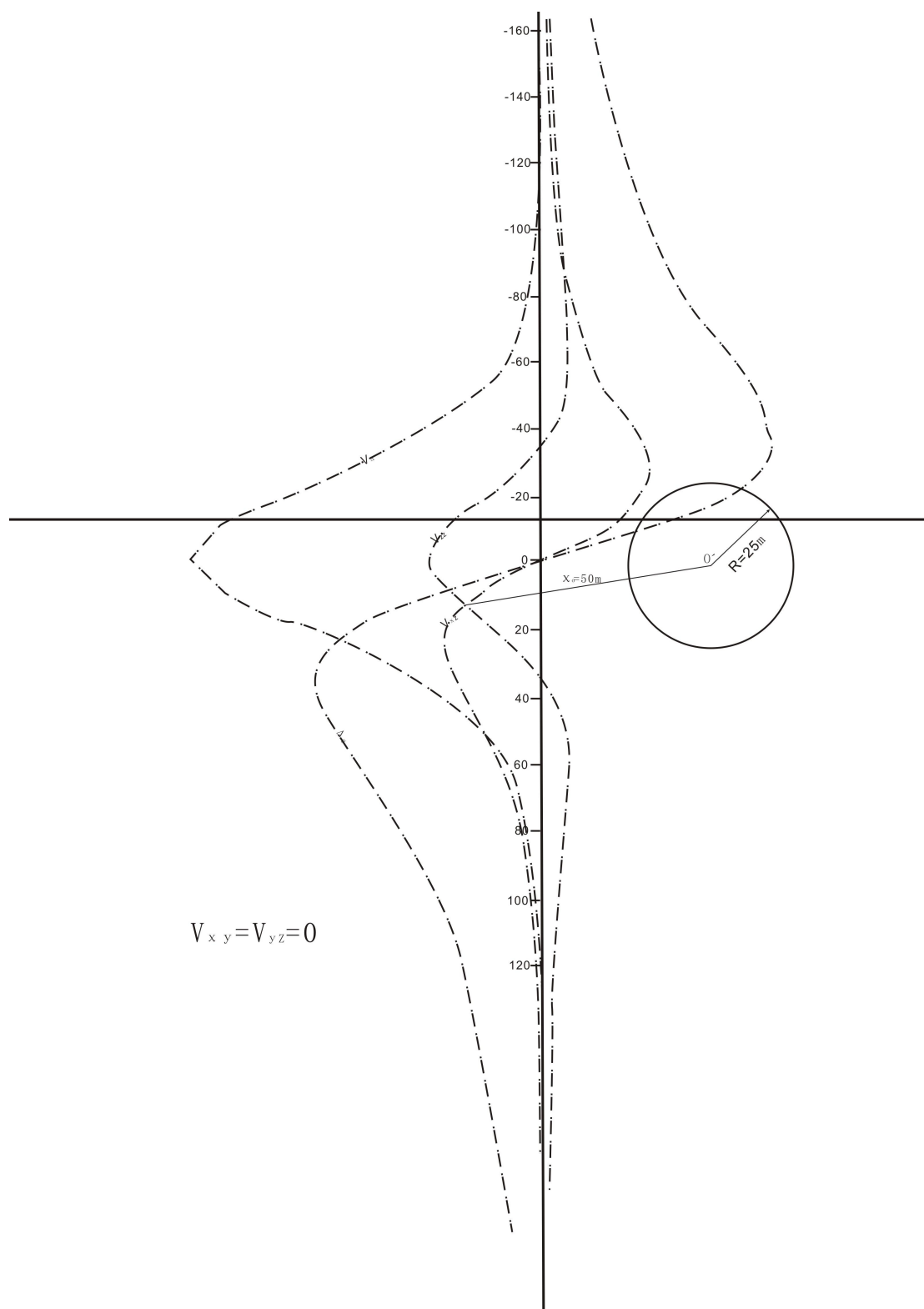
1:1000



球体井中重力测量理论曲线（附图VI）

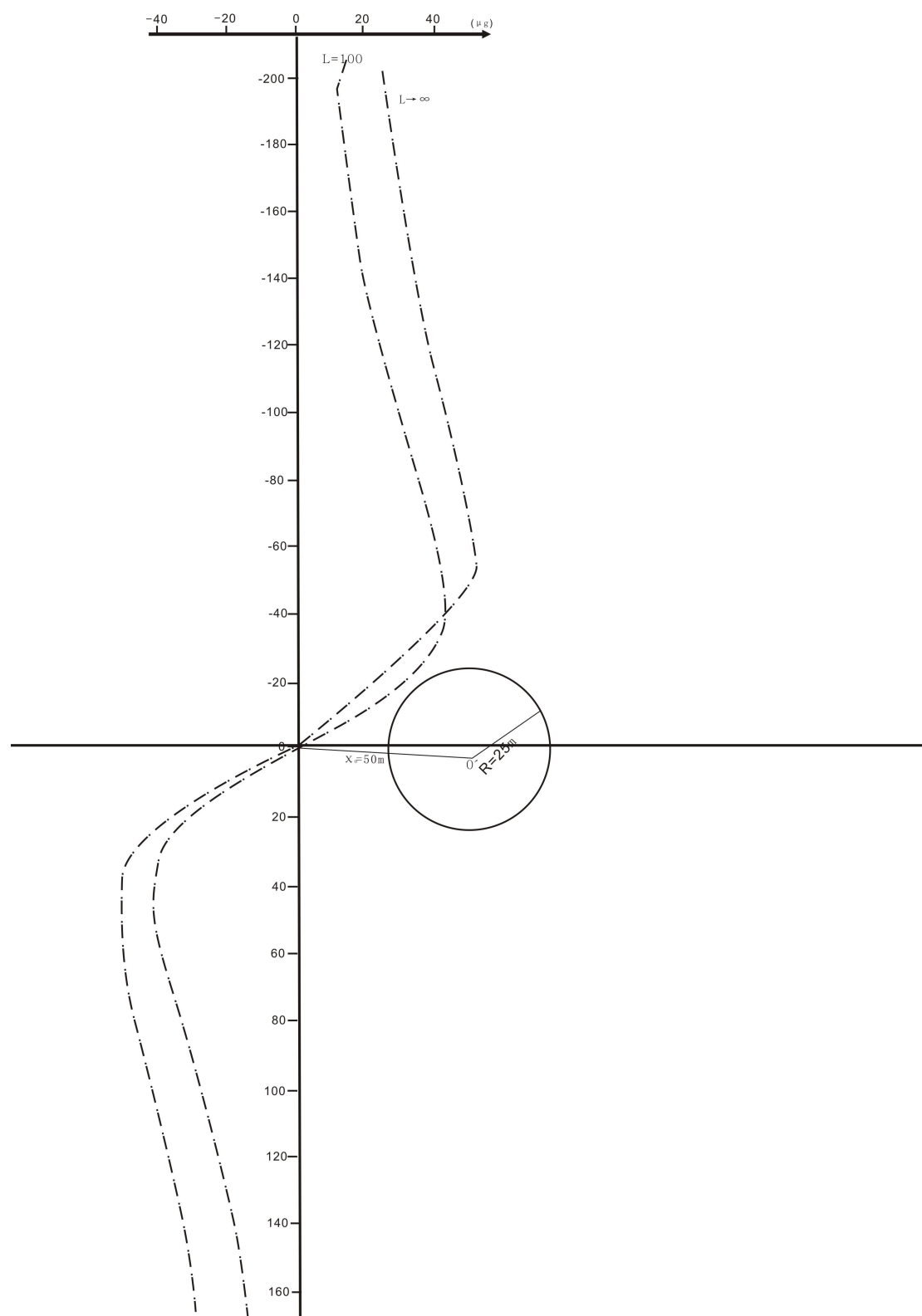
1:1000



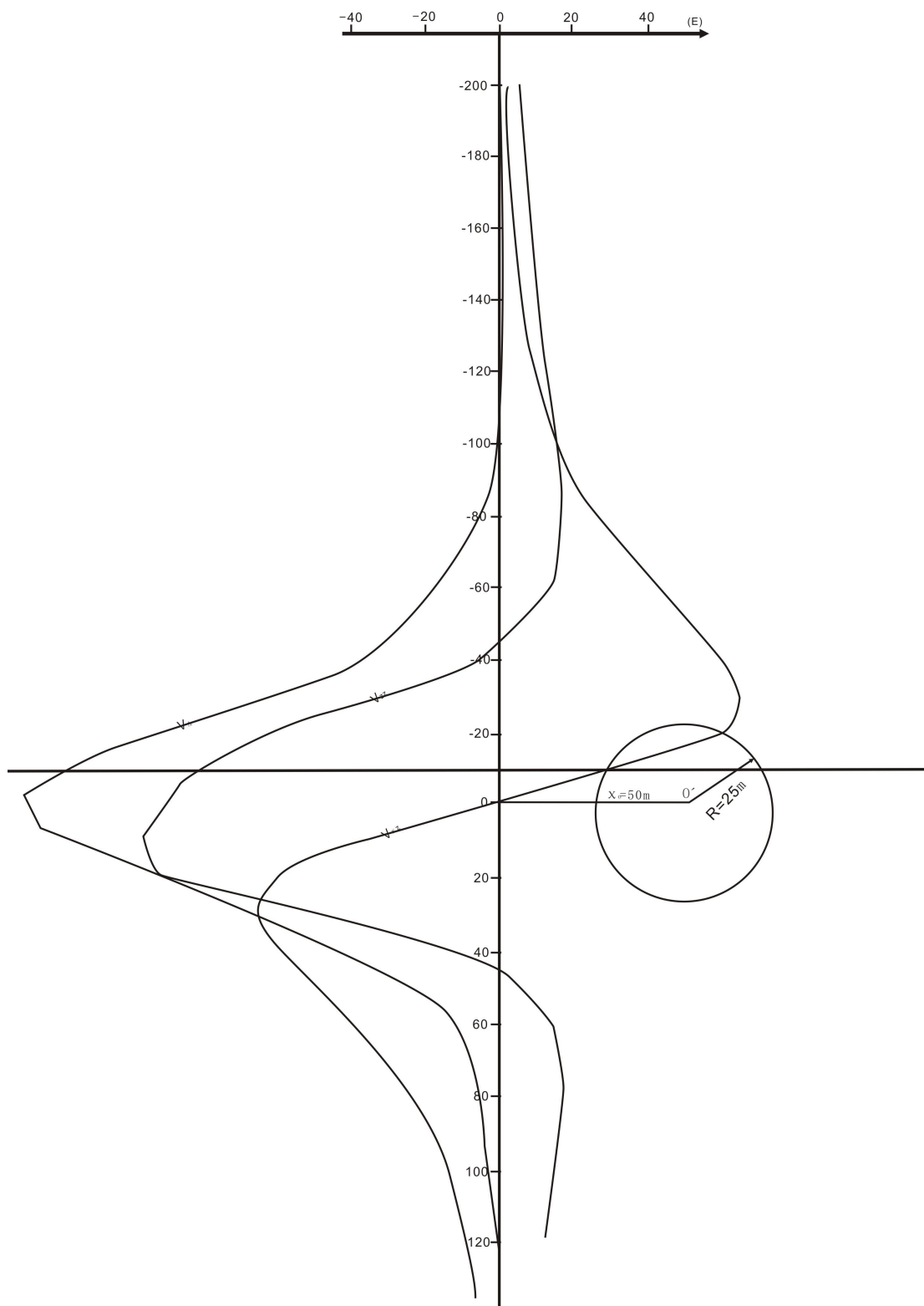


$$V_x = V_y = V_z = 0$$

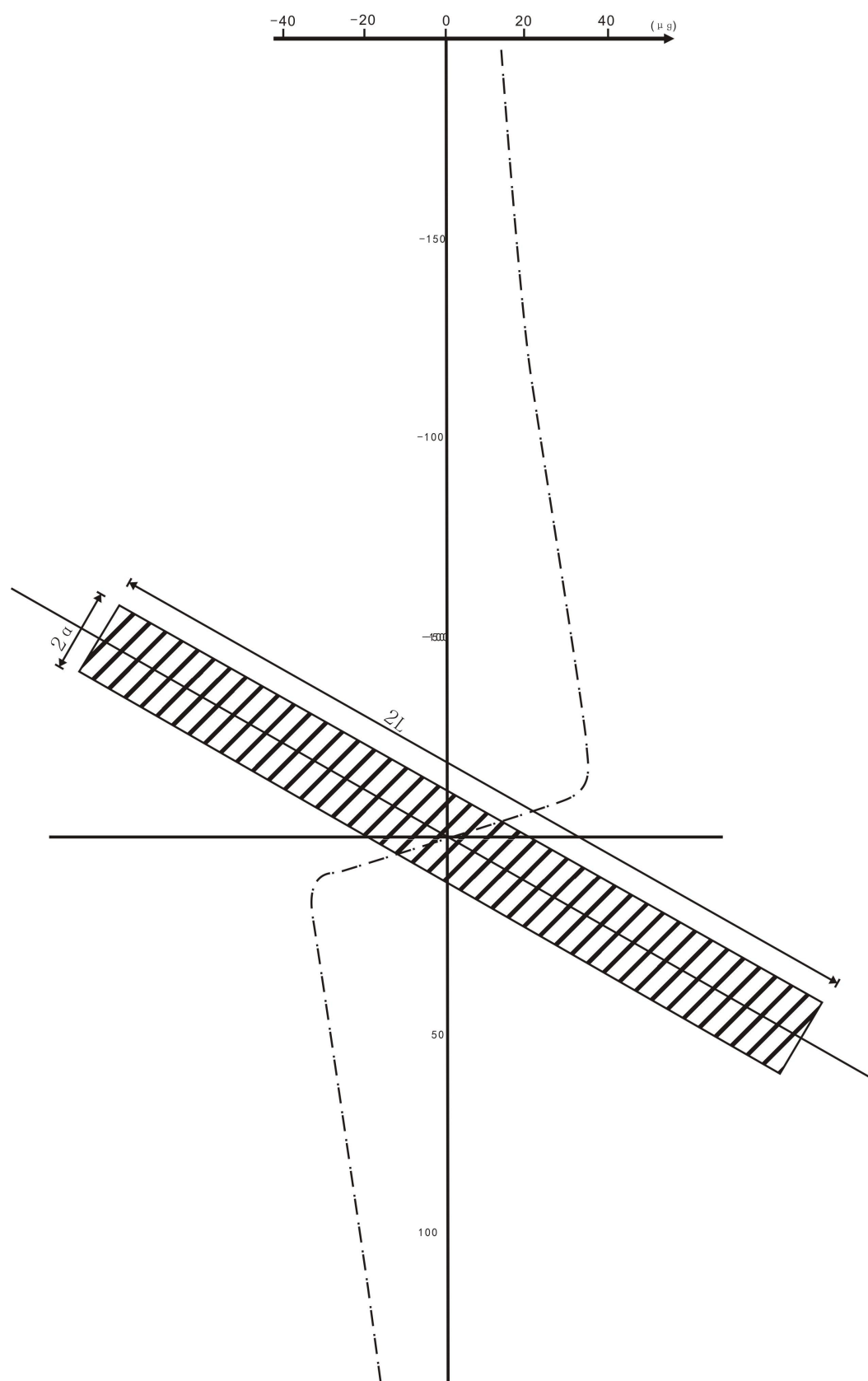
水平柱体 井中重力(Δg)理论曲线(附图VII a)



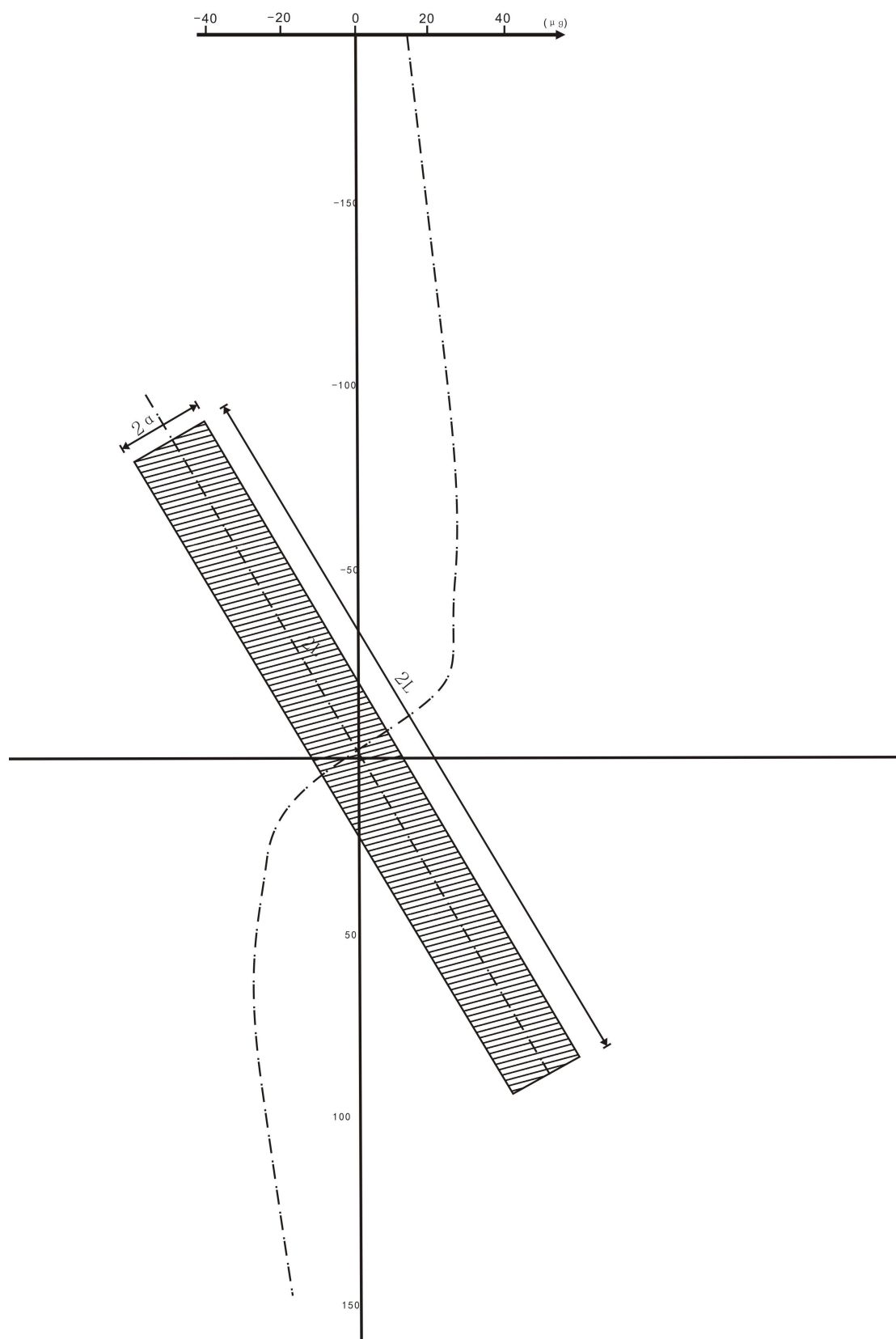
均匀有限长水平柱体
井中重力(Δg)理论曲线(附图VIIb)
1:1000



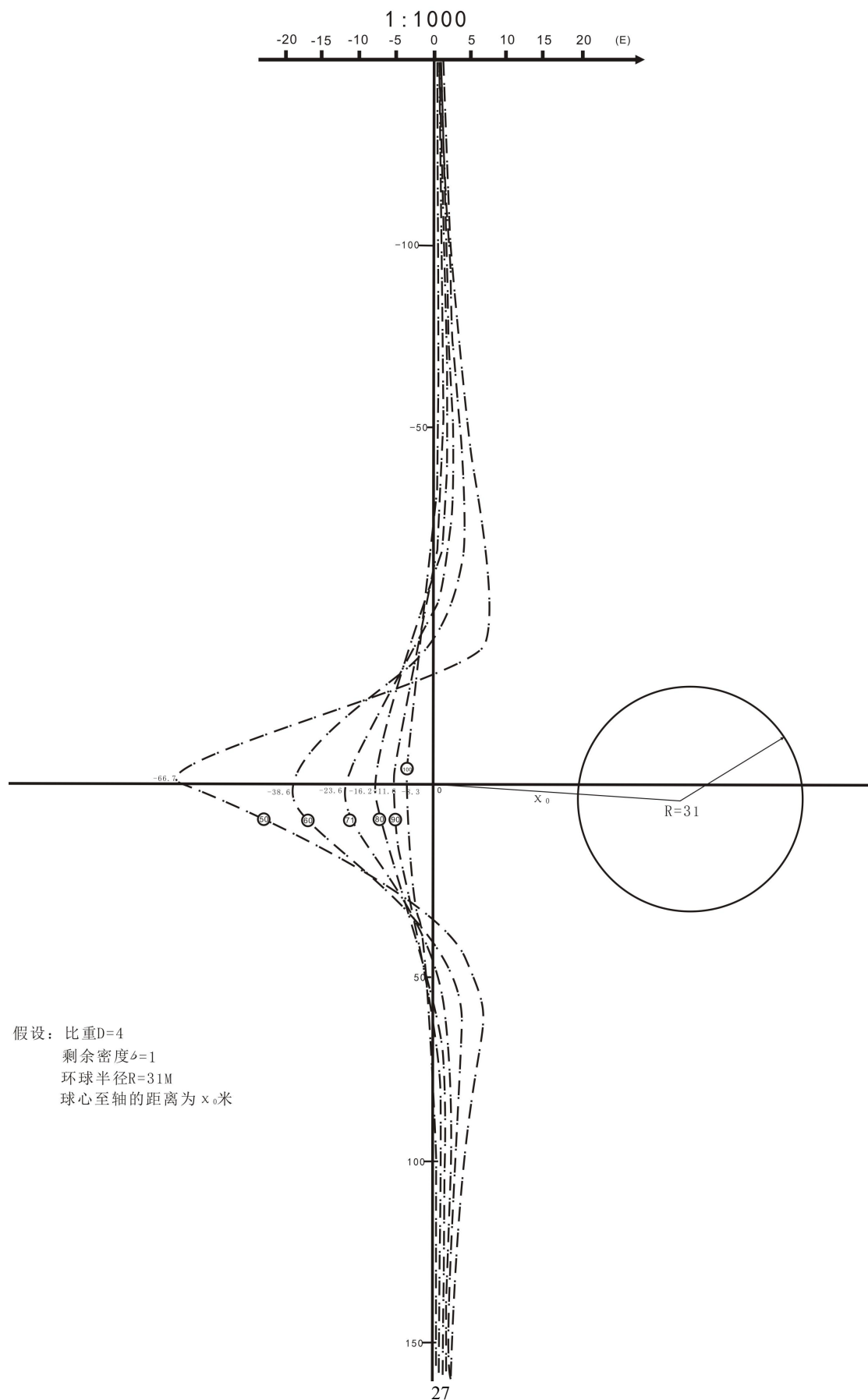
板状体井中
重力测量 (Δg) 理论曲线 (附图VIII a)
1:1000
 $\alpha = 30^\circ$



板状体井中
重力测量 (Δg) 理论曲线 (附图VIIIb)
1:1000
 $\alpha = 60^\circ$



球形铬铁矿一万吨
井中重力测量 (V_{zz}) 理论曲线 (附图V_b)



假设: 比重 $D=4$
剩余密度 $\rho=1$
环球半径 $R=31M$
球心至轴的距离为 x_0 米